"LA CIOCCOLATA, LA CARTA ……
IL DRAMMA DEI PITAGORICI
UN APPROCCIO DIVERSO AGLI IRRAZIONALI"

Gemma Gallino[1], *Flavia Piazza*[2], *Germana Trinchero*[3]
[1]*Responsabile Didattico Stage Mathesis,*
[2]*L.S "G.Ferraris" Torino,*
[3]*I.I.S. "Santorre di Santarosa" Torino*

Premessa

Il percorso presentato si basa su alcune attività svolte nell'ambito dello **stage Mathesis**.

Si tratta di uno stage residenziale di matematica, una "tre giorni" intensiva di lavoro matematico con allievi delle prime quattro classi delle Scuole Superiori che si svolge lontano dalle aule scolastiche, in una località di montagna, tradizionalmente nel mese di maggio. L'iniziativa tende a valorizzare e potenziare le eccellenze in matematica.

L'iniziativa è nata nel 1995 da una idea di un gruppo di docenti del L.S. "Galileo Ferrarsi" di Torino coordinati dalla prof. G. Gallino. I primi partecipanti furono 50 studenti e 4 docenti, tutti appartenenti alla stessa scuola. Dalla seconda edizione il piccolo gruppo si allargò inglobando altre scuole.

Allo stage Mathesis 2011 hanno partecipato circa 1400 studenti con 100 docenti di scuola superiore provenienti da una trentina di scuole del Piemonte e della Valle d'Aosta, una ventina di studenti universitari e 4 docenti universitari. Per l'elevato numero di partecipanti e la specificità del lavoro svolto, lo stage si è svolto in quattro turni di tre giorni.

Gli studenti sono suddivisi in gruppi di sei, provenienti da scuole diverse e lavorano su quattro percorsi differenti, secondo la classe di appartenenza.

Questi i percorsi dello stage 2011:

- **"1, 0 …si parte!"** (per gli studenti delle classi prime)
- **"… un viaggio nell'infinito"** (per gli studenti delle classi seconde)
- **"I poliedri e la crittografia"** (per gli studenti delle classi terze)
- **"Le geometrie non Euclide e Bolle di sapone"** (per gli studenti delle classi quarte)

Le attività proposte sono tratte dal percorso delle classi seconde. Nei giorni dello stage gli studenti sono coinvolti in diverse attività pratiche o giochi che trattano l'infinito in matematica. Si inizia con delle attività sulle serie, si affronta il paradosso di Achille e la Tartaruga e altri paradossi (l'albergo di Hilbert), si prosegue con i numeri periodici, l'infinito nell'arte, i disegni di Escher, gli irrazionali tra cui la $\sqrt{2}$, il numero aureo, i frattali.

Il Titolo

Le attività scelte riguardano **gli irrazionali** da qui l'allusione al "dramma dei Pitagorici": accettare l'esistenza di grandezze incommensurabili.
Gli irrazionali sono introdotti con attività varie:

- un gioco con la cioccolata, ci permette di parlare della radice di tre,
- i formati della carta A4,A3, A2… ci permettono di lavorare con la radice di due.

Attività 1:

LA CIOCCOLATA

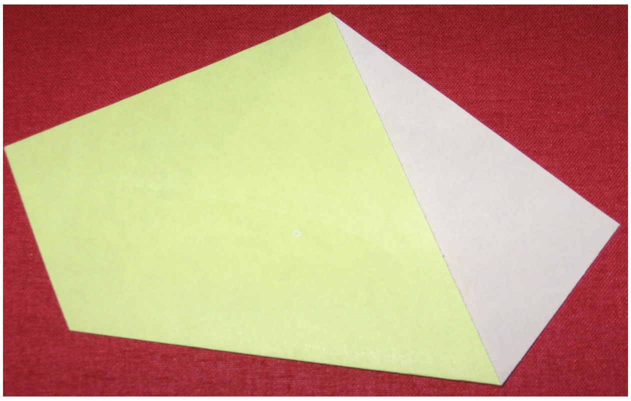
Uno dei primi giochi proposti fa riferimento ad un'attività illustrata da Rozsa Peter in "Giocando con l'infinito" (Mondadori), durante la quale ad un gruppo di ragazzi vengono distribuite delle tavolette di cioccolata. Ogni 10 incarti si riceve una tavoletta in omaggio. La domanda è: " ma quanto vale una tavoletta, considerando che se tengo la carta ed a questa aggiungo altri 9 incarti ho un'altra tavoletta?"

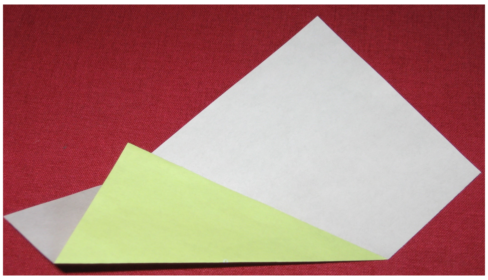
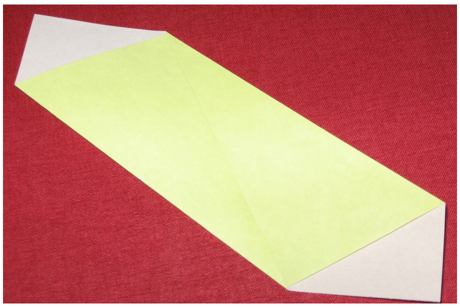
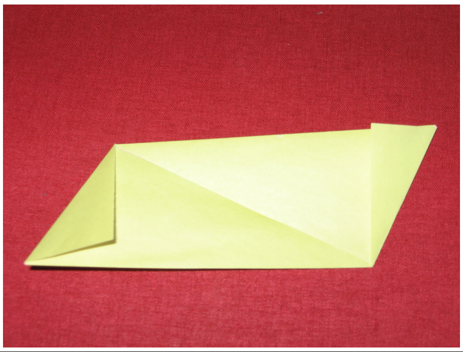
Questa domanda ci permette di far discutere i ragazzi sulle quantità finite e sulle quantità periodiche.

Ma la carta che avvolge la tavoletta ha delle misure particolari: il rapporto tra i suoi lati risulta 1 e $\sqrt{3}$. I rettangoli che hanno questo rapporto tra i loro lati permettono di costruire dei tetraedri.

Nelle immagini successive un percorso di origami che permette tale costruzione. Il modulo proposto è stato ideata da Carbone Daniela, un'origamista di Torino ed è denominato "modulo gianduiotto" perché anche la carta dei gianduiotti ha lo stesso rapporto: 1 e $\sqrt{3}$.

COSTRUZIONE DEL TETRAEDRO

	PRIMO PASSO: Si fanno combaciare i due vertici opposti del rettangolo in modo da ottenere un pentagono.

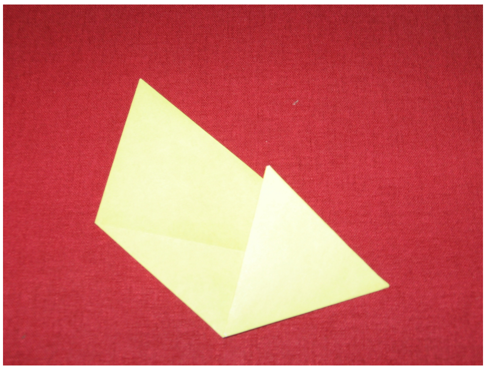
SECONDO PASSO: Si riapre il foglio. Il nostro rettangolo può essere la parte interna di due rette parallele la piegatura evidenziata dal passo precedente, la trasversale tra queste rette. Questa permette di evidenziare due angoli (uno acuto ed uno ottuso) con il bordo del nostro rettangolo. Si costruiscono le bisettrici degli angoli acuti, ovvero si piega il nostro foglio come mostrato nella figura accanto, prima bisettrice	
	TERZO PASSO: Con la piegatura successiva, ovvero con la bisettrice dell’altro lato si ottiene la figura accanto: un esagono con due lati paralleli
	QUARTO PASSO: Si ripiegano i triangoli formati da un solo strato di carta, ottenendo un parallelogramma. Il taglio della carta evidenzia una diagonale del nostro parallelogramma. Per comodità si nascondono i triangolino ripiegati sotto le precedenti piegature.

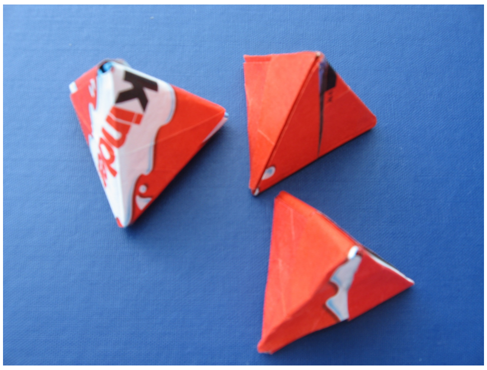
QUINTO PASSO:

Il nostro parallelogramma viene piegato portando il lato corto sul lato lungo, come mostrato nella figura accanto. Si ripete per l'altro lato corto, ottenendo un rombo. Ogni lato del rombo sarà lo spigolo del nostro tetraedro. Si piega il rombo sulla diagonale più corta, anche essa sarà uno spigolo del tetraedro.

Si può riaprire il nostro parallelogramma e le piegature evidenziate indicano i gli spigoli del tetraedro. La striscia di carta è suddivisa in quattro triangoli equilateri, le facce del tetraedro.

Appoggiando sul piano di lavoro solo uno dei due triangoli equilateri più interni e sollevando gli altri tre, unendoli nei vertici, otteniamo il nostro tetraedro.





Considerando le misure del rettangolo iniziale (1 e $\sqrt{3}$) si richiedono le misure degli spigoli, l'altezza del tetraedro.

L'attività dello stage non termina con la costruzione del tetraedro, ma prosegue perché il percorso delle seconde tratta anche i frattali e i tetraedri formati dai ragazzi vengono assemblati insieme per costruire il frattale di Sierpinski.

Si parte con modulo base formato da quattro tetraedri. Si prosegue unendo 4 moduli base per formare un'altra piramide, che a sua volta diventa modulo base, si ripete il procedimento … che per noi termina quando non abbiamo più tetraedri costruiti dai ragazzi!

Attività 2:
I FORMATI DELLA CARTA

Un'altra attività dello stage riguarda i formati della carta e si basa su una proposta didattica di una docente dello stage Mathesis : Stefania Serre.

Il percorso permette di capire le caratteristiche del formato A4, A3, A2… e il loro legame con la radice di due.

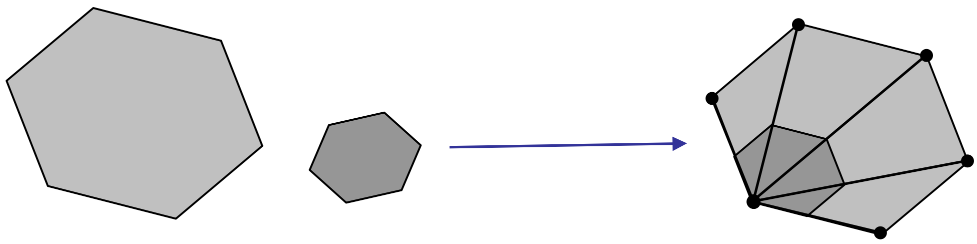
Si hanno ha disposizione due fogli rettangolari, uno formato A4, ed un altro ricavato da un A4 a cui è stata tagliata una striscia.

Il percorso prevede l'utilizzo di una scheda didattica che guida l'attività:

LA SCHEDA

Osserva la figura:

Ti può suggerire una definizione intuitiva di **figure simili**.



Hai quattro fogli: due rosa e due verdi.

Prendi un foglio verde e un foglio rosa e confrontali: sono semplicemente dei rettangoli.

Sono figure simili? …………… Perché? ………………………………………………………………

Dividi un foglio verde e un foglio rosa a metà piegando il lato più lungo, e confronta ciascuno dei nuovi rettangoli ottenuti con il foglio dello stesso colore che non hai piegato: sono simili? (per rispondere applica il procedimento precedente)

……

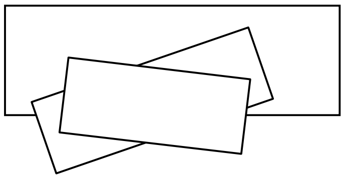
Continua a dividere per altre tre volte questi mezzi fogli, piegando ogni volta il lato più lungo. Avrai così 5 rettangoli per ciascun colore, aventi dimensioni diverse.

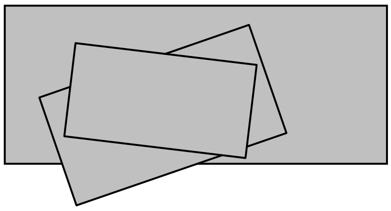
Numera tali fogli da 1 a 5, dal più grande (foglio intero) al più piccolo .

Che cosa puoi dire di ciascuno dei due insiemi di rettangoli ottenuti?

……

……





Considera l'insieme dei rettangoli tra loro simili. Confronta i rettangoli 5 e 3.

Puoi notare che tra i lati di queste figure c'è la seguente relazione:

………

mentre tra le aree delle stesse due figure la relazione è

……

Ciò non stupisce. Infatti si sa che se due rettangoli sono simili il rapporto tra le aree è ………….. del rapporto tra i due lati omologhi del rettangolo (tra i due lati più corti oppure tra i due lati più lunghi).

Viceversa il rapporto tra i lati omologhi è ………..del rapporto delle aree.

Considera i due rettangoli colorati numerati con 5 e 4. L'area del rettangolo 4 è …………….. dell'area del rettangolo 5 $(A_4 = \ldots\ldots\ldots \cdot A_5)$, quindi, poiché le due figure sono ……………………, il rapporto tra un

lato del rettangolo 4 e il suo omologo del rettangolo 5 sarà ………….. Quindi $l_4 = \ldots\ldots\ldots\ l_5$

Supponi che il lato più corto del rettangolo 5 abbia misura 1 (cioè lo prendi come unità di misura) e scrivi di conseguenza sui cinque rettangoli colorati la misura di ciascun lato.

Supponi che il lato più corto del rettangolo 5 abbia misura 1 (cioè lo prendi come unità di misura) e scrivi di conseguenza sui cinque rettangoli colorati la misura di ciascun lato. Il lato più lungo del rettangolo 1 misura ………..

In modo del tutto sperimentale hai fatto una scoperta: i rettangoli che divisi a metà forniscono un rettangolo simile a quello di partenza sono quelli che hanno ad esempio lati ……… e ……… oppure ……… e ……… cioè, in generale, sono quei rettangoli tali che …………………….………

Allo stesso risultato si può facilmente arrivare con gli strumenti dell'algebra.

Se si vuole costruire un rettangolo che sia simile alla sua metà, indicando con *l* il lato minore e *x* il maggiore, dovrà risultare $\frac{l}{\frac{x}{2}} = \frac{x}{l}$ e quindi $l^2 =$.............. e infine $x^2 =$..............

Risolvendo si ottiene $x =$..............

Il formato di carta standard è indicato con A4. Ma ci sono anche gli A3 (i fogli grandi), e gli A5 (i fogli dei quadernetti) ed anche A2, A1, A0 .

Cerchiamo di scoprire cosa si nasconde dietro queste sigle.

Misura con il righello i lati di un A4 e calcolane l'area in cm²: ……………………

L'area di un foglio A3 è quindi circa ……cm². Quella di un A2 dovrebbe essere circa …… cm² e quella di un A1 circa ………… cm². Infine l'area di un A0 sarebbe …………… cm².

Bene, in realtà i **formati della carta** nascono proprio così: si parte da un rettangolo di lati proporzionali a 1 e $\sqrt{2}$, in modo che l'area sia 1m² (che è il formato A0) e poi si divide di volta in volta a metà ottenendo tutti i formati, che sono rettangoli fra loro simili.

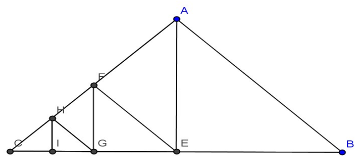
Attività 3:

ANCORA SULLA $\sqrt{2}$

Durante lo stage spesso il lavoro dei gruppi viene sospeso per effettuare delle discussioni collettive.

Si costruisce sul pavimento con del nastro adesivo colorato un rettangolo isoscele. Si considerano la misura dei cateti pari ad uno, per cui il triangolo ha le seguenti misure: 1,1, $\sqrt{2}$.

Si chiede ai ragazzi, quanto vale la somma delle altezze relative all'ipotenusa dei triangoli rettangoli isosceli pensando di continuare a tracciarle. RISPOSTA: $\sqrt{2}$



Attività 4:
IL DRAMMA DEI PITAGORICI

Con l'attività seguente si vuole evidenziare l'incommensurabilità tra la diagonale e il lato del quadrato.

Partiamo dall'affermazione che siano commensurabili, questa affermazione ci porta a considerazioni contraddittorie perciò dobbiamo concludere che è falsa l'ipotesi di partenza ovvero che in realtà lato e diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili.

Anche in questa attività si lavora con un foglio di carta.

Costruiamo un triangolo isoscele rettangolo, ipotizziamo delle misure finite espresse da numeri naturali che indicano la misura di un cateto e la misura dell'ipotenusa.

Ripieghiamo il nostro triangolo lungo la bisettrice di uno degli angoli acuti.

Questa sovrapposizione evidenzia un triangolo più piccolo sempre isoscele, data la nostra ipotesi, ha anche esso misure espresse da numeri naturali ottenuti per sottrazione tra le due misure ipotizzate inizialmente

Sul triangolo più piccolo appena formato è possibile ripetere l'operazione, ovvero ripieghiamo il foglio lungo la bisettrice dell'angolo acuto, del triangolo piccolo.

Nuovamente si evidenzia un altro triangolo più piccolo sempre isoscele, anche esso con misure espresse con numeri naturali sempre più piccoli perché ottenuti per sottrazione.

Ma fino a quando si può procedere?

Piegando la carta ci accorgiamo che "avanza" sempre un triangolo più piccolo su cui ripetere l'operazione, ma considerando i numeri che man mano diminuisco ad un certo punto si arriverà a zero, questa è la nostra contraddizione che non ci fa accettare che lato e diagonale siano commensurabili.

RINGRAZIAMENTI

I lavori presentati sono tratti dal materiale usato nelle classi seconde dello Stage Mathesis.

Il materiale è aggiornato ogni anno e si ringraziano tutti i docenti che negli anni hanno partecipato allo stage Mathesis, contribuendo a rendere più chiara l'esposizione, più scorrevole il lavoro, arricchendo le pagine ad ogni edizione con novità e dettagli.