1995-2020: UN QUARTO DI SECOLO PER LO STAGE DI MATEMATICA

Cristina Mares, Flavia Piazza, Gemma Gallino, Stefano Moretti
Associazione Subalpina Mathesis- sezione Bettazzi -Torino
stefano.moretti.81@gmail.com

Abstract
Alcune date segnano scadenze particolari ed invitano a considerazioni sul percorso già attuato. A 25 anni dalla prima edizione un gruppo di docenti presenta l'iniziativa ponendo in situazione i partecipanti su alcune attività che trovano sviluppo allo stage con allievi/e dei primi 4 anni della scuola superiore di II grado.

Parole chiave: Stage, matematica, materiale

PREMESSA

"*La matematica è una barzelletta*"… così si esprime Alex Bellos nell'introduzione al libro "I numeri ci somigliano"(ed. Einaudi)
"…L'ha-ha! Del caso della barzelletta e l'aha!nel caso della matematica descrivono la stessa esperienza, e questo è uno dei motivi per cui capire la matematica può essere così piacevole da creare dipendenza…"

Questo accostamento tra l'effetto dato da un finale inaspettato in una barzelletta ed un finale dato da una dimostrazione o dal risultato ottenuto nella risoluzionedi un problema ci sembra molto appropriato per descrivere le esperienze che vivono gli allievi/e allo stage.

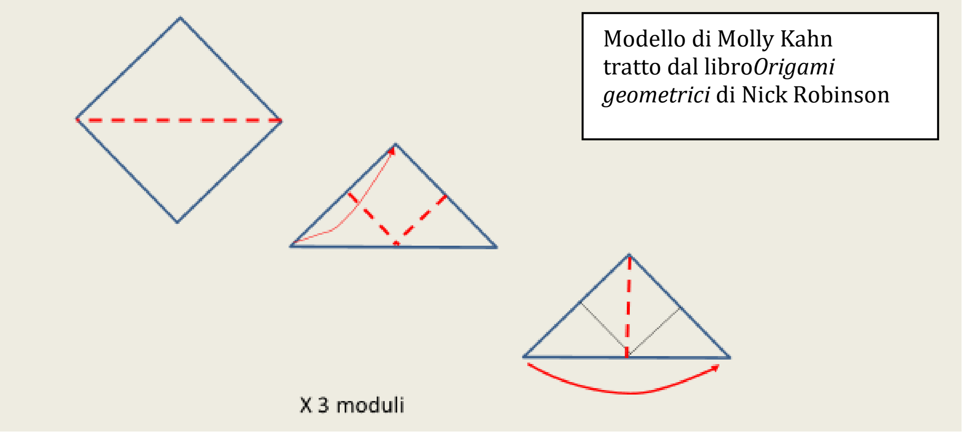
Durante lo stage, in tre giorni intensi di lavoro, gli allievi vengono invitati a confrontarsi su tematiche insolite, su quesiti intriganti e nel percorso risolutivo viene data loro la possibilità di aiutarsi con materiali che sostengono il ragionamento.

Spesso è così facile che, dopo molti tentativi improduttivi, dopo molto lavoro di calcoli, la soluzione balzi evidente manipolando i materiali e cogliendo da questi suggestioni non colte nel lavoro precedente.

Un argomento che si presta particolarmente a descrivere quanto accade allo stage è quello della geometria solida: spesso è davvero difficile figurarsi le situazioni descritte da cui poi occorre trarre proprietà o teoremi.

Diventa così importante avere in mano gli oggetti solidi che occorre studiare e per queste situazioni la tecnica dell'origami offre molte possibilità.

Con una semplice "Bipiramide" ottenuta dalla piegatura di tre quadrati è così semplice "vedere" composizioni di forme, composte da 2 oppure 4 oppure 8 bipiramidi, riconsiderare il significato di poliedri stellati, verificare la formula di Eulero.



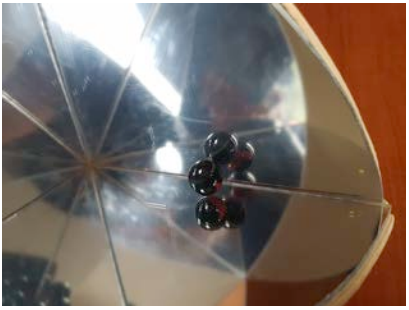
Modello di Molly Kahn tratto dal libro*Origami geometrici* di Nick Robinson

Risulta così molto evidente il motto francese se lo pensiamo applicato all'insegnamento:*"Le dire c'est bien, le faire c'est mieux"*.

Caleidoscopi e geometrie non euclidee

Per capire l'importanza che i materiali possono avere nella scoperta di concetti anche complessi, possiamo vedere quali suggestioni ci portano a fare dei semplici specchi. Poniamo due specchi piani in piedi sul tavolo in modo che abbiano un lato in comune. Posizioniamo ora all'interno dell'angolo che viene a formarsi tra i due specchi una biglia, come si vede in figura.

Se gli specchi formano un angolo retto, possiamo vedere nel diedro formato dagli specchi quattro biglie: quella reale e le tre riflesse.
Se posizioniamo invece gli specchi in modo tale da formare un angolo di 60°, possiamo vedere 6 biglie. Se posizioniamo gli specchi in modo tale da formare un angolo di 45°, le biglie sono otto. Se infine mettiamo gli specchi in modo tale da formare un angolo di 30°, le biglie sono dodici.
Da queste semplici osservazioni possiamo intuire che sussiste una relazione tra il numero di biglie e l'angolo, infatti il numero delle biglie equivale al rapporto tra l'angolo giro e l'angolo che è formato dagli specchi. Questa relazione, però, può anche essere ribaltata, cioè possiamo, per così dire, misurare l'angolo contando le riflessioni della biglia. Questo è proprio quello che facciamo con un secondo materiale: una serie di caleidoscopi. Ognuno di questi è una sorta di camera di specchi.



Ogni coppia di facce/specchi interni crea un angolo solido. Posizionando la biglia circa a metà di ogni spigolo di ogni caleidoscopio, riusciamo a contare le riflessioni e quindi a misurare in questo modo particolare l'angolo che si forma. La cosa interessante è che la somma di questi tre angoli interni al

caleidoscopio è minore di 180 gradi. Questi caleidoscopi infatti sono stati costruiti congiungendo l'ipotetico centro di una sfera con tre punti sulla sua superficie. Ogni lato del triangolo sferico è un segmento costruito su una geodetica.
Questa semplice esperienza ci permette di fare una prima conoscenza con la geometria non euclidea: con la geometria sferica. Questo è solo un piccolo estratto di tutto un percorso sulla geometria non euclidea che porta a parlare di rotte di aerei e di fisica moderna.

Impacchettamento delle sfere

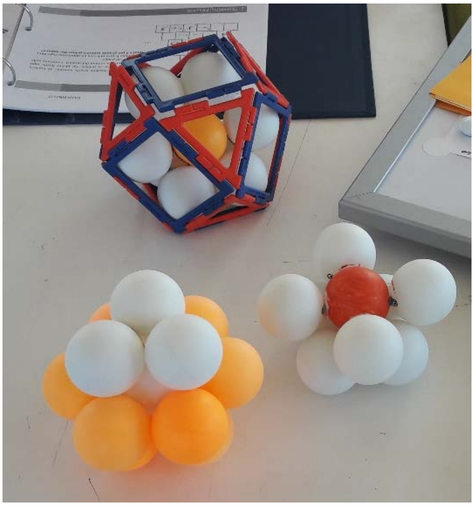
Come avete potuto osservare l'utilizzo di materiali concreti aiuta gli studenti a comprendere problemi complessi, vediamone ora un altro esempio affrontando il problema dell'impacchettamento delle sfere, posto per la prima volta da Keplero nel 1611 e risolto soltanto nel 1998 dal matematico Thomas Hales.
Non è facile svolgere la dimostrazione che si avvale dell'utilizzo del computer per l'esecuzione di calcoli lunghi e difficoltosi, ma possiamo intuire la validità della conclusione attraverso dei materiali opportuni che permettono di visualizzarla in modo semplice.
Il problema:
Qual è il miglior modo di impilare arance in modo da lasciare il minor spazio possibile tra di esse?
Cominciamo ponendoci in un caso semplificato e provando a ragionare nel piano. Supponiamo, ad esempio, di avere a disposizione alcune monete uguali tra loro e di volerle disporre su di un piano.
È possibile farlo in 2 modi diversi:disposizione quadrata edisposizione triangolare.

Così scrive Keplero a proposito della questione riguardante la disposizione delle palle di cannone: " *In generale quandopalle uguali vengono raccolte in un qualunque contenitore esse si dispongono in due modi diversi, secondo i due modi in cui le si può disporre nel piano. Se palle uguali sono sparse nello stesso piano orizzontale e le si spinge l'una contro l'altra così strettamente che si toccano l'un l'altra, esse si disporranno a triangolo* *oppure a quadrato.Nel primo caso sei palle ne circondano una, nel secondo quattro. Complessivamente ciò accade per tutte le palle eccetto quelle più esterne. Con una disposizione pentagonale non si può mantenere l'uniformità."*

Osserviamo che una disposizione esagonale può essere spezzata in una triangolare e che tra le 2 possibilità individuate la disposizione triangolare risulta la più conveniente, in quanto lascia "buchi" di area inferiore tra una moneta e l'altra.

Supponiamo ora di avere delle palline da pingpong e di volerle disporre nello spazio. Possiamo farlo partendo dalle disposizioni determinate nel piano e aggiungendo palline "sopra" e"sotto" in modo da osservarne le configurazioni derivanti nello spazio.

Keplero così prosegue: "*Ora, se si procede ad accumulare dei corpi solidi più strettamente possibile e si avanza strato per strato, le palle avranno o una disposizione quadrata oppure triangolare. Se quadrata, o una palla superiore poggia su una immediata inferiore, oppure ogni singola palla superiore si accomoderà tra quattro di quelle inferiori. In questo modo ogni palla è toccata da quattro vicine nello stesso piano e da una sopra e una sotto, e così via e ognuna è toccata da sei altre. La disposizione sarà cubica, e se schiacciate le palle diventeranno dei cubi. Ma questa non sarà la disposizione più compatta. Nel secondo modo, non solo ogni palla è toccata dalle sue quattro vicine, ma anche da quattro di sotto e quattro di sopra e così in tutto una è toccata da 12, e sotto pressione le palle sferiche diventeranno dei romboidi. Questo arrangiamento sarà il più compatto possibile così che in nessuna altra disposizione si potrà mettere un maggior numero di palle nello stesso contenitore."*



Contrariamente a quanto si possa pensare le 2 configurazioni ottenute sono identiche tra loro, situazione facilmente osservabile attraverso il Polydron, un materiale che evidenzia mediante un'apposita struttura le disposizioni quadrata e triangolare, entrambe presenti ma visibili da prospettive differenti.

Il gioco della palline

La frase di Alex Bellos afferma *"La matematica è una barzelletta"*… ma cosa fa una barzelletta, se non creare "emozioni"? Ed è anche questo che viene fatto nei tre giorni di intenso lavoro matematico, *Creare-Emozioni* perché tutti i processi di apprendimento sono al tempo stesso cognitivi ed emotivi.
Un esempio esplicativo è "Il gioco delle palline", attività con cui si accolgono gli studenti che si cimentano con il tema dell'Infinito.
Si analizza una situazione problematica e, interagendo con gli studenti, li si induce a dare risposte contraddittorie, suscitando interesse e passione che caratterizzano tutto il periodo dello stage.
Il gioco delle palline:
"Si prende una scatola vuota e uno scivolo su cui si pongono 30 palline numerate da 1 a 30. Si fanno scivolare nella scatola le palline numerate da 1 a 10, i ragazzi devono estrarre la pallina con il numero 1. Si fanno cadere le palline numerate da 11 a 20, si fa estrarre la pallina con il numero 2. Si fanno nuovamente scivolare nella scatola le palline numerate da 21 a 30, i ragazzi ora estraggono la pallina numero 3. Si chiude la scatola e si invita ad immaginare di ripetere il procedimentoall'infinito.
Ora la domanda cruciale: **Quante palline ci saranno nella scatola?** Normalmente la risposta dataè: **Infinite.**
Si chiede di indicare una pallina precisa, se sono infinite almeno una ci sarà. Viene, ad esempio, indicata la pallina 15, a questo punto si pone la domanda: **La pallina 15 è dentro la scatola?** La risposta sarà no, perché è stata tolta alla 15esima caduta …
Si pone nuovamente la domanda cruciale e normalmente la risposta dei ragazzi è **ZERO**. Si chiede quindi se nella scatola ci sono infinite palline o zero palline, considerando anche che quando si è tolta la pallina numero 1, sono rimaste 9 palline, quando si è tolta la pallina numero 2 sono rimaste 18 palline..."
I ragazzi rimango perplessi e coinvolti emotivamente, suscitando un forte interesse per tutto lo stage.
Lo stage di matematica: emozioni e materiale pratico per coinvolgere studenti in approfondimenti matematici.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI E SITOGRAFICI

ALEX BELLOS, *I numeri ci somigliano*. Einaudi, Torino

NICK ROBINSON, *Origami Geometrici*. Edizioni White Star

M. BERTOLINI M., BINI G. CEREDA P., LOCATELLI O., *Passeggiare tra le superfici*, Mimesis, Milano 2012

MILOTTI E. , articolo apparso sulla rivista Scienza Nuova Anno I n.2 maggio 1998

GALLINO G. (2019), *Il ritmo del goal!*, fascicolo stage math 2019

CAPONE R., corso di Didattica della Matematica 2015-16.

BURGER B, STARBIRD M.,*Dall'improbabile all'infinito*, Edizione Dedalo pag 280..285